Tentamen Discrete Wiskunde, 30 januari 2009, 13.30-15.30 uur

De opgaven van dit tentamen tellen alle tien even zwaar mee bij de bepaling van je eindcijfer

Opgave 1. Druk de volgende beweringen uit in A en B met behulp van de voegtekens $\wedge$ en $\neg$, of bewijs dat dit niet mogelijk is

a) $(A \vee B) \to A$

b) $(A \to B) \to B$

Opgave 2. Ik definieer een relatie $\propto$ in $\{\text{Alpje}, \text{Pudding}, \text{Koelie}\}$ door middel van zijn tabel:

$\propto$	Alpje	Pudding	Koelie
Alpje	1	1	0
Pudding	0	1	1
Koelie	1	0	1

Ga na of $\propto$ een partiële ordening is, en bewijs je conclusie

Opgave 3. Zij kleinpoes de verzameling $\{\text{Alpje}, \text{Fafner}, \text{Wally}\}$

a) Hoeveel partities van kleinpoes bestaan er?

b) Hoeveel equivalentierelaties in kleinpoes bestaan er?

c) Hoeveel van deze equivalentierelaties $\simeq$ voldoen aan $\forall_{x \in \text{kleinpoes}} \exists_{y \in \text{kleinpoes}} [y \neq x \wedge x \simeq y]$?

Opgave 4. Ik definieer twee functies f en g van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ inductief door

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 3 + f(n) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0) = 1 \\ g(n+1) = 2g(n) \end{cases}$$

a) Bepaal functievoorschriften voor f en voor g

b) Bepaal functievoorschriften voor $f \circ g$ en voor $g \circ f$

Opgave 5. Er bestaan twintig rijtjes van 3 poesjes en 3 hondjes:

PPPHHH	PPHPHH	PPHHPH	PPHHHP	PHPPHH	PHPHPH	PHPHHP
PHHPPH	PHHPHP	PHHHPP	HPPPHH	HPPHPH	HPPHHP	HPHPPH
HPHPHP	HPHHPP	HHPPPH	HHPPHP	HHPHPP	HHHPPP	

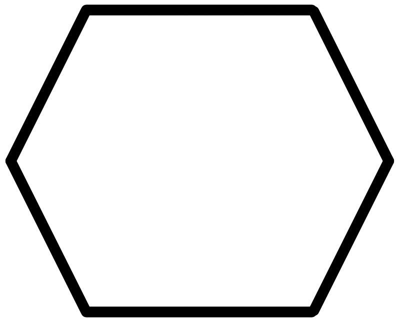
Hoeveel rijtjes van 10 poesjes en 10 hondjes bestaan er?

Opgave 6. Bepaal alle gehele getallen n waarvoor geldt

$$\boxed{\begin{aligned} n &\equiv 7 \pmod{20} \\ n &\equiv 3 \pmod{75} \end{aligned}}$$

(de opgaven 7–10 vind je op de achterkant van dit blaadje)

Opgave 7. Ik wil de zes zijden van deze zeshoek kleuren, elke zijde met één van de kleuren geel, rood, blauw, bruin, paars, oranje, groen



a) Hoeveel kleuringen zijn er mogelijk?

b) Hoeveel van deze kleuringen voldoen aan de extra eis: aangrenzende zijden hebben ongelijke kleuren

Opgave 8. Op dag 0 hebben zich vijf spinnen in mijn huis genesteld. Deze griezels vermenigvuldigen zich snel: als ik geen maatregelen zou nemen, zou het aantal spinnen elke dag met een factor 3 groeien. Daarom neem ik mij dapper voor, elke morgen zeven spinnen te vangen en genadeloos door het toilet te spoelen. Het aantal spinnen s_n op dag n wordt dus bepaald door

$$\begin{cases} s_0 = 5 \\ s_{n+1} = 3s_n - 7 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ik maak alvast een lijstje van het aantal spinnen dat ik in de komende dagen zal moeten dulden:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
s_n	5	8	17	44	125	368	1097	3284	9845	29528	88577	265724	$\cdots$

Bereken s_n uit de gegevens

Opgave 9. We noemen een dierenrijtje 'ongezellig' als er nergens twee poesjes naast elkaar staan. Er zijn, als ik goed geteld heb, 57 ongezellige rijtjes van lengte 3 van aapjes/beertjes/hondjes/poesjes:

AAA	AAB	AAH	AAP	ABA	ABB	ABH	ABP	AHA	AHB
AHH	AHP	APA	APB	APH	BAA	BAB	BAH	BAP	BBA
BBB	BBH	BBP	BHA	BHB	BHH	BHP	BPA	BPB	BPH
HAA	HAB	HAH	HAP	HBA	HBB	HBH	HBP	HHA	HHB
HHH	HHP	HPA	HPB	HPH	PAA	PAB	PAH	PAP	PBA
PBB	PBH	PBP	PHA	PHB	PHH	PHP			

Zij s_n het aantal ongezellige rijtjes van lengte n van aapjes/beertjes/hondjes/poesjes

a) Bereken s_0, s_1 en s_2

b) Zoek een recursieve betrekking voor s_n en bewijs de juistheid van de gevonden recursie

Opgave 10. In de komende 14 dagen wil ik elke dag met één van mijn tien poesjes een functioneringsgesprek houden. Ik wil hiervoor een rooster opstellen, bijvoorbeeld:

dag 1	dag 2	dag 3	dag 4	dag 5	....	dag 13	dag 14
Wally	Alpje	Kaasje	Fafner	Zompie		Kaasje	Koelie

Op hoeveel manieren kan ik zo'n rooster opstellen, als elke poesje minstens één keer aan de beurt moet komen?

Oplossingen Tentamen Discrete Wiskunde

Opgave 1.

a) $(A \vee B) \to A \quad \equiv \quad B \to A \quad \equiv \quad \neg(B \wedge \neg A)$

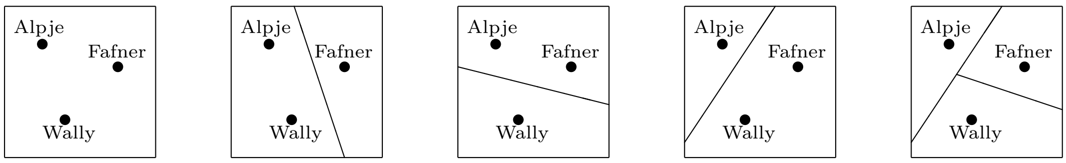
b) $(A \to B) \to B \quad \equiv \quad A \vee B \quad \equiv \quad \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Opgave 2. $\propto$ is geen partiële ordening, want hij is niet transitief:

$$\text{Alpje} \propto \text{Pudding} \;\text{ en }\; \text{Pudding} \propto \text{Koelie, maar } \neg(\text{Alpje} \propto \text{Koelie})$$

Opgave 3.

a) Er zijn vijf partities van kleinpoes:



b) 5, want het aantal equivalentierelaties is gelijk aan het aantal partities

c) 1, want alleen bij de meest linkse partitie zit elk poesje in een hokje met nog minstens één ander poesje

Opgave 4.

a) $f(n) = 3n + 1$ en $g(n) = 2^n$

b) $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2^n) = 3 \cdot 2^n + 1$
$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(3n + 1) = 2^{3n+1}$

Opgave 5. Ik kan zo'n rijtje als volgt maken:

- selecteer 10 van de 20 posities
- zet op de geselecteerde posities een poesje
- en zet op de overige posities een hondje

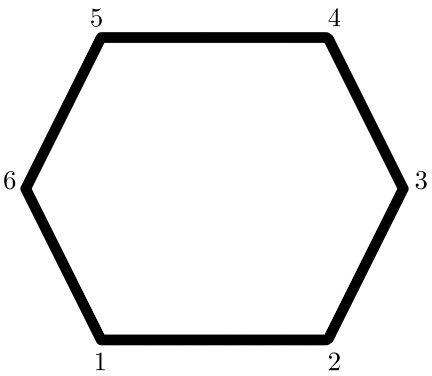
Het aantal rijtjes is gelijk aan het aantal mogelijke uitvoeringen van dit algoritme, en is dus

$$\binom{20}{10} = 184756$$

Opgave 6. Zo'n gehele getallen n zijn er niet, want

$$\left.\begin{array}{lllll} n \equiv 7 & (\text{mod } 20) & \Longrightarrow & n \equiv 2 & (\text{mod } 5) \\ n \equiv 3 & (\text{mod } 75) & \Longrightarrow & n \equiv 3 & (\text{mod } 5) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{tegenspraak}$$

Opgave 7.



a) $7^6 = 117649$

b) Dat lukt met In- en Exclusie, met als objecten de 7^6 kleuringen, en als eigenschappen $E_1, \ldots, E_6$ waarbij E_i betekent: de aan hoekpunt i grenzende zijden hebben dezelfde kleur. Het gevraagde aantal is

$$\begin{aligned} N_0 &= N - \sum N(E_i) + \sum N(E_iE_j) - \cdots + N(E_1 \cdots E_6) \\ &= 7^6 - \binom{6}{1}7^5 + \binom{6}{2}7^4 - \binom{6}{3}7^3 + \binom{6}{4}7^2 - \binom{6}{5}7^1 + 7 \end{aligned}$$

en volgens het Binomium van Newton is dit $= (7-1)^6 + 6 = 6^6 + 6 = 46662$

Opgave 8. Ik pas het algoritme voor inhomogene recursieve betrekkingen toe op $s_{n+1} - 3s_n = -7$:

(1) De bijbehorende homogene vergelijking is $s_{n+1} - 3s_n = 0$, en deze heeft als algemene oplossing $\lambda \cdot 3^n$

(2) Een speciale oplossing van de inhomogene vergelijking $s_{n+1} - 3s_n = -7$ vind je door een constante rij te proberen: invulling van $s_n = c$ leidt tot $c - 3c = -7$ en dus $c = \frac{7}{2}$

(3) De algemene oplossing van $s_{n+1} - 3s_n = -7$ vind je door de resultaten van (1) en (2) op te tellen: $s_n = \frac{7}{2} + \lambda \cdot 3^n$

(4) De gezochte oplossing vis je hieruit door $s_0 = 5$ in te vullen: $5 = \frac{7}{2} + \lambda \cdot 3^0$ en dus $\lambda = \frac{3}{2}$. Dus

$$\boxed{s_n = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot 3^n}$$

Opgave 9.

a) $s_0 = 1$, $s_1 = 4$ en $s_2 = 15$

b) $s_{n+1} = 3s_n + 3s_{n-1}$ voor alle $n \geq 1$. Dit vind je bijvoorbeeld via de volgende hulpdefinities:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal ongezellige } n\text{-rijtjes, eindigend met een poesje} \\ b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{het aantal ongezellige } n\text{-rijtjes, niet eindigend met een poesje} \end{aligned}$$

(1) $a_{n+1} = b_n$, want een ongezellig $(n+1)$-rijtje, eindigend met een poesje, ontstaat door een poesje te plaatsen achter een ongezellig n-rijtje dat niet met een poesje eindigt

(2) $b_{n+1} = 3s_n$, want een ongezellig $(n+1)$-rijtje, niet eindigend met een poesje, ontstaat door een aapje, een beertje of een hondje te plaatsen achter een willekeurig ongezellig n-rijtje

(3) Optelling van de resultaten (1) en (2) leidt tot $s_{n+1} = 3s_n + b_n$. Uit (2) volgt $b_n = 3s_{n-1}$, dus

$$\boxed{s_{n+1} = 3s_n + 3s_{n-1}}$$

Opgave 10. Zo'n rooster is een surjectieve functie van de verzameling van de 14 vakantiedagen naar de verzameling van de 10 poesjes. Het aantal mogelijke roosters is dus

$$10!\, S(14, 10) = 2731586457600$$