Tentamen Discrete Wiskunde (I00028), 25 jan 2007, 8.30–10.30

De opgaven van dit tentamen tellen alle tien even zwaar mee bij de bepaling van je eindcijfer

Opgave 1. Zij A de verzameling van alle natuurlijke getallen n die voldoen aan $\dfrac{n-3}{7} \in \mathbb{Z}$

a) Noem vijf getallen uit A

b) Is A aftelbaar? (motiveer je antwoord)

c) Maak een bijectieve functie van $\mathbb{N}$ naar A

Opgave 2. Zij s_n het aantal natuurlijke getallen $< 10^n$ dat in zijn tientallige notatie nergens twee negens achter elkaar heeft. Ik heb al een paar van deze dingen voor jou geteld:

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = 10 \qquad s_2 = 99 \qquad s_3 = 981 \qquad s_4 = 9720$$

Uit deze voorbeelden krijg je wellicht een vaag vermoeden omtrent een recursieve betrekking voor s_n:

$$\boxed{\text{Vermoeden: } \forall_{n\in\mathbb{N}}[s_{n+2} = 9s_{n+1} + 9s_n]}$$

a) Bewijs de juistheid van dit vermoeden

b) Bepaal een gesloten formule voor s_n

Opgave 3. Ga voor elk van de volgende beweringen na of hij waar is voor alle deelverzamelingen V van $\mathbb{N}$. Als je van mening bent dat een bewering voor al deze verzamelingen V waar is, hoef je dat niet te bewijzen. Maar ben je van mening dat dat niet het geval is, dan moet je een tegenvoorbeeld geven, dat wil zeggen een concrete verzameling V waarvoor die bewering onwaar is

a) $\forall_{x\in V}\exists_{n\in\mathbb{N}}[x < n]$

b) $\exists_{n\in\mathbb{N}}\forall_{x\in V}[x < n]$

c) $\forall_{x\in V}[x+1 \in V] \to V = \mathbb{N}$

Opgave 4. Ik neem mij voor om in de week van 29 januari t/m 4 februari 2007 elke avond één van mijn tien poezen een uurtje op schoot te nemen. Een mogelijk weekschema hiervoor zou bijvoorbeeld zijn:

maandag	dinsdag	woensdag	donderdag	vrijdag	zaterdag	zondag
Wally	Pudding	Pommetje	Wally	Wobbeltje	Kaasje	Wally

a) Hoeveel verschillende weekschema's zijn er mogelijk?

b) In hoeveel van deze weekschema's komen de drie langharige poesjes (Wally, Alpje en Fafner) alle drie minstens één keer aan de beurt?

Opgave 5. Zij $\sim$ de relatie in $\mathbb{N}$ die gedefinieerd wordt door

$$\boxed{n \sim m} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\exists_{k\in\mathbb{Z}}[n = 2^k \cdot m]}$$

a) Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is

b) Bepaal de equivalentieklasse $[7]_\sim$

(op de achterkant van dit blaadje staan nóg vijf opgaven)

Opgave 6. Ik definieer twee verzamelingen 'dag' en 'eten' door

$$\begin{cases} \text{dag} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{ma}, \text{di}, \text{wo}, \text{do}, \text{vr}, \text{za}, \text{zo}\} \\ \text{eten} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{hutspot}, \text{spagetti}, \text{boerenkool}, \text{chili}, \text{nassi}, \text{paella}, \text{macaroni}\} \end{cases}$$

Onder een <u>weekmenu</u> verstaan we een bijectieve functie van dag naar eten. Geef bij de volgende vragen de uitkomsten, een toelichting is niet nodig

a) Hoeveel weekmenu's bestaan er?

b) Hoeveel weekmenu's f voldoen aan $f(\text{ma}) = \text{nassi}$?

c) Hoeveel weekmenu's f voldoen aan $\overleftarrow{f}(\text{paella}) \in \{\text{ma}, \text{di}, \text{wo}\}$?

Opgave 7. Ik produceer fruitmanden met appels, peren en mandarijntjes. Onder een n-mand versta ik een mand met n stuks fruit. Het aantal qua samenstelling verschillende n-manden zal ik s_n noemen. Een voorbeeld: $s_2 = 6$, want er zijn zes verschillende 2-manden mogelijk:

2 appels 0 peren 0 mandarijntjes	1 appel 1 peer 0 mandarijntjes	1 appel 0 peren 1 mandarijntje
0 appels 2 peren 0 mandarijntjes	0 appels 1 peer 1 mandarijntje	0 appels 0 peren 2 mandarijntjes

a) Bereken s_3

b) Bereken s_{100}

Opgave 8. We definiëren een functie cijfersom : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$\text{cijfersom}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{de som van de cijfers in de tientallige notatie van } n$$

Bijvoorbeeld: cijfersom(22011993) = 27.

Bereken het aantal natuurlijke getallen $n < 10^{50}$ waarvoor geldt: cijfersom$(n) = 27$

Opgave 9. Zij x een reëel getal

a) Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{1000} (7 + nx)$

b) Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{1000} \binom{7}{n} x^n$

c) Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{7} x^n$

Opgave 10. De rij van getallen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ wordt recursief gedefinieerd door

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_{n+1} = 3s_n + 2n + 7 \end{cases}$$

a) Bereken s_3

b) Bepaal een gesloten formule voor s_n

Oplossingen Discrete Wiskunde I00028, 25 jan 2007

Opgave 1.

a) $3, 10, 17, 24, 31$

b) A is aftelbaar, want $A = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94, 101, 108, 115, 122, 129, \ldots\}$

c) Bijvoorbeeld: $n \mapsto 7n + 3$

Opgave 2.

a) Twee hulpdefinities:

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{ het aantal getallen} < 10^n \text{ zonder het patroon 99, eindigend op 9} \\ b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \text{ het aantal getallen} < 10^n \text{ zonder het patroon 99, niet eindigend op 9} \end{aligned}$$

Hiervoor geldt $a_{n+1} = b_n$ en $b_{n+1} = 9s_n$, dus $s_{n+1} = b_n + 9s_n = 9s_{n-1} + 9s_n$

b) De nulpunten van de karakteristieke veelterm $x^2 - 9x - 9$ zijn $\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{13}$, dus

$$s_n = \lambda \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^n + \mu \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^n$$

waarna je λ en μ berekent door $s_0 = 1$ en $s_1 = 10$ in te vullen. Je vindt uiteindelijk

$$s_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{11}{78}\sqrt{13}\right)\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{11}{78}\sqrt{13}\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^n$$

Opgave 3.

a) Waar (bewijs: stel $x \in V$; kies $n = x + 3$; dan $x < n$)

b) Tegenvoorbeeld: $V = \mathbb{N}$

c) Tegenvoorbeeld: $V = \{7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$

Opgave 4.

a) Er zijn $10^7 = 10000000$ weekschema's, want ik mag zeven keer kiezen uit tien poezen

b) Dat bereken je met het principe van inclusie en exclusie. De objecten zijn de weekschema's, en de eigenschappen zijn:

$$\begin{aligned} E_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{ Wally komt niet aan de beurt} \\ E_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{ Alpje komt niet aan de beurt} \\ E_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{ Fafner komt niet aan de beurt} \end{aligned}$$

Het gevraagde aantal weekschema's is dan

$$\begin{aligned} N_0 &= N - N(E_1) - N(E_2) - N(E_3) + N(E_1E_2) + N(E_1E_3) + N(E_2E_3) - N(E_1E_2E_3) \\ &= 10^7 - 3 \cdot 9^7 + 3 \cdot 8^7 - 7^7 \\ &= 1119006 \end{aligned}$$

Opgave 5.

a) $\sim$ is reflexief (want $n = 2^0 \cdot n$), symmetrisch (want $n = 2^k \cdot m \;\rightarrow\; m = 2^{-k} \cdot n$) en transitief (want uit $p = 2^a \cdot q$ en $q = 2^b \cdot r$ volgt $p = 2^{a+b} \cdot r$)

b) $[7]_\sim = \{7, 14, 28, 56, 112, 224, \ldots\}$

Opgave 6.

a) $7! = 5040$ (een weekmenu maak ik door de zeven gerechten in een volgorde te zetten)

b) $6! = 720$ (zo'n weekmenu komt in feite neer op een volgorde van de andere zes gerechten)

c) $3 \cdot 6! = 2160$ (kies een paelladag uit $\{\text{ma}, \text{di}, \text{wo}\}$ en zet de andere gerechten in een volgorde)

Opgave 7.

a) $s_3 = 10$. Kijk maar naar het onderstaande overzicht (van boven naar onder staan de aantallen appels, peren en mandarijntjes):

3	0	0	2	2	1	0	1	0	1
0	3	0	1	0	2	2	0	1	1
0	0	3	0	1	0	1	2	2	1

b) s_{100} is het aantal verdelingen van 100 identieke objecten over drie verschillende doelen. Dus

$$s_{100} = \binom{102}{2} = 5151$$

Opgave 8. Gevraagd wordt het aantal rijen $a_1, \ldots, a_{50}$ uit $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}^{50}$ met $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 27$. Dit aantal is de coëfficiënt van x^{27} in

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^9)^{50} = \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^{50} = (1 - x^{10})^{50} \cdot \frac{1}{(1 - x)^{50}}$$

$$= \left(1 - 50x^{10} + \binom{50}{2}x^{20} - \binom{50}{3}x^{30} + \cdots\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k + 49}{49} x^k$$

en deze coëfficiënt is

$$\binom{76}{49} - 50\binom{66}{49} + \binom{50}{2}\binom{56}{49} = 284541552328735818200$$

Opgave 9.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{1000}(7 + nx) = (\text{aantal termen}) \cdot (\text{gemiddelde waarde}) = 1001 \cdot \frac{7 + (7 + 1000x)}{2} = 7007 + 500500x$

b) Voor natuurlijke getallen $n > 7$ is $\binom{7}{n} = 0$, dus $\displaystyle\sum_{n=0}^{1000}\binom{7}{n}x^n = \sum_{n=0}^{7}\binom{7}{n}x^n = (1 + x)^7$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{7}x^n = x^7\left(\binom{7}{7} + \binom{8}{7}x + \binom{9}{7}x^2 + \cdots\right) = \frac{x^7}{(1 - x)^8}$

Opgave 10. Ik doe alleen maar (b), met het hiervoor behandelde algoritme:

- de bijbehorende homogene vergelijking $s_{n+1} - 3s_n = 0$ heeft oplossingen $\lambda \cdot 3^n$
- ik zoek één oplossing van $s_{n+1} - 3s_n = 2n + 7$ via de poging $s_n = An + B$:

$$A(n + 1) + B - 3(An + B) = 2n + 7 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -2A = 2 \\ A - 2B = 7 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = -4 \end{cases}$$

  en vind zo de speciale oplossing $s_n = -n - 4$
- de algemene oplossing van $s_{n+1} - 3s_n = 2n + 7$ is dus $s_n = -n - 4 + \lambda \cdot 3^n$
- uit het gegeven $s_0 = 0$ volgt $\lambda = 4$ en dus $s_n = -n - 4 + 4 \cdot 3^n$
- en laat ik nu toch ook maar (a) doen: $s_3 = 101$