

# Tentamen Discr Wisk (I00028B 3ec), 25 jan 2007, 8.30–10.30

De opgaven van dit tentamen tellen alle tien even zwaar mee bij de bepaling van je eindcijfer

**Opgave 1.** Ik definieer een nieuw voegteken  $\smile$  door middel van de volgende tabel:

$A$	$B$	$A \smile B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Druk  $\smile$  uit in  $\wedge$  en  $\neg$ , of bewijs dat dit onmogelijk is

**Opgave 2.** Formuleer, voor predikaten  $P$  over  $\mathbb{N}$ , de volgende beweringen met gebruik van voegtekens en/of kwantificatoren:

- Er bestaat minstens één natuurlijk getal dat groter dan 25 is en aan  $P$  voldoet
- Er bestaan twee opeenvolgende natuurlijke getallen die aan  $P$  voldoen
- Er bestaat hoogstens één natuurlijk getal dat kleiner dan 100 is en aan  $P$  voldoet

**Opgave 3.** Zij  $A$  de verzameling van alle natuurlijke getallen  $n$  die voldoen aan

$$\frac{n-3}{7} \in \mathbb{Z}$$

- Noem vijf getallen uit  $A$
- Is  $A$  aftelbaar? (motiveer je antwoord)
- Maak een bijectieve functie van  $\mathbb{N}$  naar  $A$

**Opgave 4.** Ga voor elk van de volgende beweringen na of hij waar is voor alle deelverzamelingen  $V$  van  $\mathbb{N}$ . Als je van mening bent dat een bewering voor al deze verzamelingen  $V$  waar is, hoef je dat niet te bewijzen. Maar ben je van mening dat dat niet het geval is, dan moet je een tegenvoorbeeld geven, dat wil zeggen een concrete verzameling  $V$  waarvoor die bewering onwaar is

- $\forall x \in V \exists n \in \mathbb{N} [x < n]$
- $\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in V [x < n]$
- $\forall x \in V [x + 1 \in V] \rightarrow V = \mathbb{N}$

**Opgave 5.** Ik definieer een relatie  $\preceq$  in  $\mathcal{P}\{\text{poesje, hondje}\}$  door

$$V \preceq W \stackrel{\text{def}}{=} (\text{poesje} \in V \rightarrow \text{poesje} \in W) \wedge (\text{hondje} \in W \rightarrow \text{hondje} \in V)$$

Ga na of  $\preceq$  een partiële ordening is. Als je van mening bent dat  $\preceq$  een partiële ordening is, hoef je dit niet te bewijzen, maar je moet in dat geval wel even zijn Hasse diagram tekenen. Ben je van mening dat het géén partiële ordening is, dan moet je aangeven aan welke eis(en) niet is voldaan

(op de achterkant van dit blaadje staan nóg vijf opgaven)

**Opgave 6.**

- a) Hoeveel partities van  $\{\text{appel, peer, mandarijntje, kiwi}\}$  bestaan er?  
 b) Hoeveel van deze partities  $P$  voldoen aan  $\forall_{x \in P} [\text{peer} \in x \rightarrow \text{kiwi} \in x]$ ?

**Opgave 7.** Zij  $\sim$  de relatie in  $\mathbb{N}$  die gedefinieerd wordt door

$$\boxed{n \sim m} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{\exists_{k \in \mathbb{Z}} [n = 2^k \cdot m]}$$

- a) Bewijs dat  $\sim$  een equivalentierelatie is  
 b) Bepaal de equivalentieklasse  $[7]_{\sim}$

**Opgave 8.** Ik definieer twee verzamelingen ‘dag’ en ‘eten’ door

$$\begin{cases} \text{dag} & \stackrel{\text{def}}{=} & \{\text{ma, di, wo, do, vr, za, zo}\} \\ \text{eten} & \stackrel{\text{def}}{=} & \{\text{hutspot, spaghetti, boerenkool, chili, nassi, paella, macaroni}\} \end{cases}$$

Onder een weekmenu verstaan we een bijectieve functie van dag naar eten. Geef bij de volgende vragen de uitkomsten, een toelichting is niet nodig

- a) Hoeveel weekmenu’s bestaan er?  
 b) Hoeveel weekmenu’s  $f$  voldoen aan  $f(\text{ma}) = \text{nassi}$ ?  
 c) Hoeveel weekmenu’s  $f$  voldoen aan  $\overleftarrow{f}(\text{paella}) \in \{\text{ma, di, wo}\}$ ?

**Opgave 9.** Ik definieer een functie  $F$  van  $\{\text{poesje, hondje}\}^{\mathbb{N}}$  naar  $\{\text{poesje, hondje}\}^{\mathbb{N}}$  door

$$\boxed{F(f) \stackrel{\text{def}}{=} \text{de functie } n \mapsto f(n+3)}$$

- a) Is  $F$  injectief?  
 b) Is  $F$  surjectief op  $\{\text{poesje, hondje}\}^{\mathbb{N}}$ ?

(elk correct antwoord wordt beloond met 3 punten, en een goede motivatie van je antwoord met 2 punten)

**Opgave 10.** Ik definieer de verzameling ‘gezin’ door

$$\boxed{\text{gezin} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{vader, moeder, zoon, dochter, huisdier}\}}$$

- a) Hoeveel totale ordeningen van gezin bestaan er?  
 b) Bereken het aantal totale ordeningen  $\preceq$  van gezin waarvoor geldt:

$$(\text{vader} \preceq \text{huisdier}) \wedge (\text{moeder} \preceq \text{huisdier})$$

# Oplossingen Discrete Wiskunde I00028B, 25 jan 2007

**Opgave 1.** Bijvoorbeeld:  $\boxed{A \smile B} \equiv \boxed{\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(A \wedge B)}$

**Opgave 2.** Dat kan bijvoorbeeld als volgt:

- a)  $\exists_{n \in \mathbb{N}}[n > 25 \wedge P(n)]$
- b)  $\exists_{n \in \mathbb{N}}[P(n) \wedge P(n + 1)]$
- c)  $\forall_{n, m \in \mathbb{N}}[n < 100 \wedge m < 100 \wedge P(n) \wedge P(m) \rightarrow n = m]$

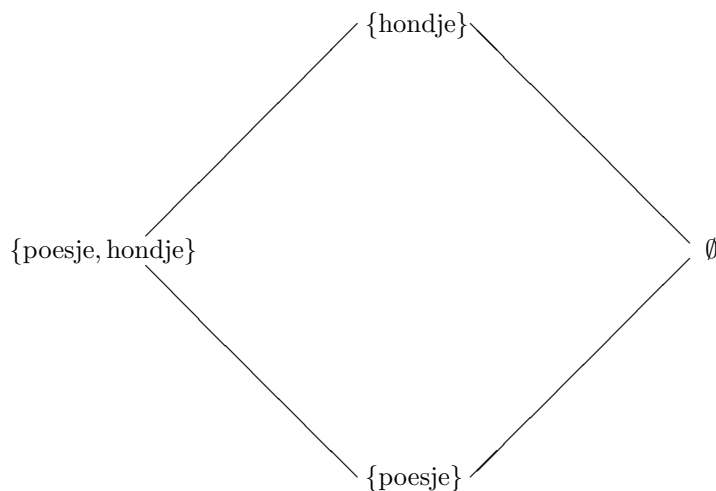
**Opgave 3.**

- a) 3, 10, 17, 24, 31
- b)  $A$  is aftelbaar, want  $A = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94, 101, 108, 115, 122, 129, \dots\}$
- c) Bijvoorbeeld:  $n \mapsto 7n + 3$

**Opgave 4.**

- a) Waar (bewijs: stel  $x \in V$ ; kies  $n = x + 3$ ; dan  $x < n$ )
- b) Tegenvoorbeeld:  $V = \mathbb{N}$
- c) Tegenvoorbeeld:  $V = \{7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$

**Opgave 5.** Deze relatie  $\preceq$  is een partiële ordening, en zijn Hasse diagram is



**Opgave 6.**

- a) Dat aantal is het Bell getal  $B_4 = 15$
- b) Deze eis komt neer op: kiwi zit in hetzelfde hokje als peer. Zo'n partitie kun je dus opvatten als een partitie van een verzameling van drie elementen, en het aantal is dus  $B_3 = 5$

**Opgave 7.**

- a)  $\sim$  is reflexief (want  $n = 2^0 \cdot n$ ), symmetrisch (want  $n = 2^k \cdot m \rightarrow m = 2^{-k} \cdot n$ ) en transitief (want uit  $p = 2^a \cdot q$  en  $q = 2^b \cdot r$  volgt  $p = 2^{a+b} \cdot r$ )
- b)  $[7]_{\sim} = \{7, 14, 28, 56, 112, 224, \dots\}$

**Opgave 8.**

- a)  $7! = 5040$  (een weekmenu maak ik door de zeven gerechten in een volgorde te zetten)  
b)  $6! = 720$  (zo'n weekmenu komt in feite neer op een volgorde van de andere zes gerechten)  
c)  $3 \cdot 6! = 2160$  (kies een paelladag uit  $\{\text{ma, di, wo}\}$  en zet de andere gerechten in een volgorde)

**Opgave 9.** Je kunt  $\{\text{poesje, hondje}\}^{\mathbb{N}}$  opvatten als de verzameling van alle oneindige rijen van poesjes en hondjes.  $F$  is dus de functie 'schrapp de eerste drie dieren'. Deze interpretatie maakt de opgave heel simpel:

- a)  $F$  is niet injectief. Bewijs:

$$F(\text{hondje, poesje, poesjepoesje, poesje, } \dots) = F(\text{poesje, poesje, poesjepoesje, poesje, } \dots)$$

- b)  $F$  is wel surjectief. Bewijs:

Iedere  $f \in \{\text{poesje, hondje}\}^{\mathbb{N}}$  is het  $F$ -beeld van het rijtje  $(\text{hondje, hondje, hondje, } f(0), f(1), \dots)$

**Opgave 10.**

- a) Dat zijn er  $5! = 120$   
b) Er zijn vele manieren om dit te tellen. Het handigst lijkt mij, gebruik te maken van symmetrie: van het drietal (huisdier, vader, moeder) zal in  $1/3$  van het totale aantal totale ordeningen huisdier het hoogst staan in het Hasse diagram. Het gevraagde aantal is dus

$$\frac{120}{3} = 40$$